ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ 16 6 2021

ΘΕΜΑ Α

Α1. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 135

Α2. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 51

Α3. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 23

Α4. α) Σ
β) Λ
γ) Σ
δ) Σ
ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε $f(x+1)=(x+1)e^{-x}\ (1)\ \forall x\in\mathbb{R}$

Θέτουμε $y=x+1\Rightarrow x=y-1$

Έχουμε ότι $y\in\mathbb{R}$, αφού $x\in\mathbb{R}$

Η $(1)\Leftrightarrow f(y)=ye^{1-y}, y\in\mathbb{R}$

Αντικαθιστούμε το y με το x και έχουμε $f(x)=x\cdot e^{1-x}, x\in\mathbb{R}$

Β2.

$$f'(x)=\left(x\cdot e^{1-x}\right)'=(x)'e^{1-x}+x\cdot\left(e^{1-x}\right)'=$$
$$=e^{1-x}+x\cdot e^{1-x}\cdot(1-x)'=e^{1-x}-x\cdot e^{1-x}=$$
$$=e^{1-x}(1-x)$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 1-x=0\leftrightarrow x=1$$
$$f'(x)>0\Leftrightarrow 1-x>0\leftrightarrow x<1$$
$$f'(x)<0\Leftrightarrow 1-x<0\leftrightarrow x>1$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	OM	$\searrow$	

$$f(1)=1$$

Η f είναι γν. αύξουσα στο $(-\infty,1]$

Η f είναι γν. φθίνουσα στο $[1,+\infty)$

Στο $x=1$ η f παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο το $f(1)=1\cdot e^{1-1}=1$

Β3.

$$f''(x)=\left(f'(x)\right)'=\left(e^{1-x}-xe^{1-x}\right)'=$$
$$=\left(e^{1-x}\right)'-\left(x\cdot e^{1-x}\right)'=e^{1-x}\cdot(1-x)'-e^{1-x}(1-x)=$$
$$=-e^{1-x}+e^{1-x}\cdot(x-1)=e^{1-x}\cdot(x-2)$$

$f''(x)=0\Leftrightarrow x-2=0\leftrightarrow x=2$
$f''(x)>0\Leftrightarrow x-2>0\leftrightarrow x>2$
$f''(x)<0\Leftrightarrow x-2<0\leftrightarrow x<2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$		$+$	
$f''(x)$		↘		↗	

ΣK

$A\left(2,\frac{2}{e}\right)$

Στο $(-\infty,2]$ η f είναι κοίλη

Στο $[2,+\infty)$ η f είναι κυρτή

Στο $x=2$ η f παρουσιάζει σημείο καμπής το $A\left(2,\frac{2}{e}\right)$: $f(2)=2\cdot e^{1-2}=2\cdot e^{-1}=\frac{2}{e}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot e^{1-x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}e^{1-x}=(1)$$

Θέτουμε $u=1-x, \lim\limits_{x\to+\infty}u=\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)=-\infty$

άρα $(1)\lim\limits_{u\to-\infty}e^{u}=0$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x\cdot e^{1-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x-1}}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x-1}}=0$, άρα η $y=0$ (άξονας $x'x$)

είναι οριζόντια ασύμπτωτη της Cf στο $+\infty$

$$\lim_{X\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{X\to-\infty}\frac{xe^{1-x}}{x}=\lim_{X\to-\infty}e^{1-x}\quad(2)$$

Θέτουμε $v=1-x, \lim\limits_{x\to-\infty}v=\lim\limits_{x\to-\infty}(1-x)=+\infty$

$(2)\lim\limits_{v\to+\infty}e^{v}=+\infty$

Άρα η Cf δεν έχει πλάγιες-οριζόντιες ασύμπτωτες στο $-\infty$

Επειδή η f συνεχής στο $\mathbb{R}$, δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Β4. i)

Επειδή f συνεχής και $\nearrow$ στο $(-\infty,1]$

ισχύει $A_1 = f\left((-\infty,1]\right) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), f(1)\right] = (-\infty,1]$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot e^{1-x} = (-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty$

Επειδή f συνεχής και $\downarrow$ στο $[1,+\infty)$

ισχύει $A_2 = f\left([1,+\infty)\right) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f(1)\right] = (0,1]$

$f(\mathbb{R}) = A_1 \cup A_2 = (-\infty,1]$

ii)

α) Αν $\lambda > 1$: $f(x) = \lambda$ είναι αδύνατη, γιατί $f(x) \le 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β) Αν $\lambda = 1$: η $f(x) = \lambda \Leftrightarrow f(x) = 1$, έχει μοναδική ρίζα το $x = 1$, γιατί μόνο $f(x) = 1$

γ) Αν $0 < \lambda < 1$, η $f(x) = \lambda$ έχει δύο ρίζες, μία το $x_1 \in (-\infty,1)$, αφού $f\left((-\infty,1]\right) = (-\infty,1)$

και μία το $x_2 \in (1,+\infty)$, αφού $f\left((1,+\infty)\right) = (0,1)$

δ) Αν $\lambda \le 0$ η $f(x) = \lambda$ έχει μία ρίζα $x_3 \in (-\infty,0)$ αφού $f((-\infty,0]) = (-\infty,0]$ επειδή f συνεχής και $\uparrow$ στο $(-\infty,0]$.

Στο $(0,1]$ η $f(x) = \lambda$ δεν έχει ρίζα αφού $f((0,1] = (0,1]$

Στο $[1,+\infty)$ η $f(x) = \lambda$ δεν έχει ρίζα, αφού $f([1,+\infty)) = (0,1]$

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x) \quad \begin{cases} ax^3 - 3x^2 - x + 1, & x \le 0 \\ \sigma\upsilon\nu x, & 0 < x \le \dfrac{3\pi}{2} \end{cases} \qquad a < -3$$

Γ1. Έχουμε $Df = \left(-\infty, \dfrac{3\pi}{2}\right]$

Για $x \in (-\infty,0)$ η f συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Για $x \in \left(0, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ η f συνεχής ως τριγωνομετρική.

Έχουμε:

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-}\left(ax^3 - 3x^2 - x + 1\right) =$

$= a\cdot0^3 - 3\cdot0^2 - 0 + 1 = 1$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu 0 = 1$

$f(0) = 1$

Άρα η f συνεχής στο 0 αφού $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} f(x) = f(0)$

Συνεπώς η f συνεχή στο $(-\infty,2]$

Η f παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x)=3ax^2-6x-1$

Η f παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right]$ ως τριγωνομετρική με $f'(x)=(\sigma\upsilon\nu x)=-\eta\mu x$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{ax^3-3x^2-x+1-1}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{ax^3-3x^2-x}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{x\left(ax^3-3x^2-1\right)}{x}=\lim_{x\to0^-}\left(ax^2-3x-1\right)=-1$$

$$\lim_{x\to o^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to o^+}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$$

Επειδή $\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\neq\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο Ο

Γ2. Έχουμε $f(0)=a\cdot0^3-3\cdot0^2-0+1=1$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{2}=0$$

Άρα $f(0)\neq f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

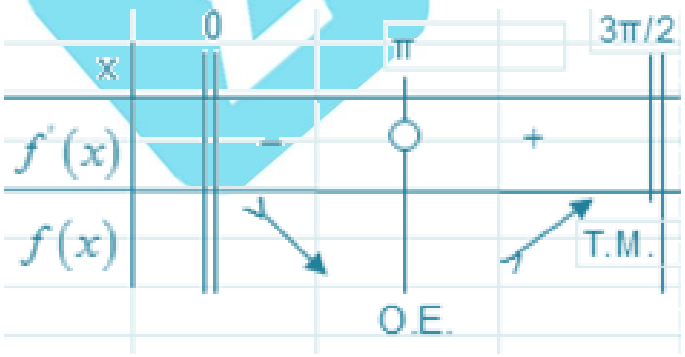
Άρα η f δεν ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$

ii) Έχουμε $f(x)=\sigma\upsilon\nu x \qquad x\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right]$

$$f'(x)=-\eta\mu x \qquad x\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow-\eta\mu x=0\Leftrightarrow\eta\mu x=0\Leftrightarrow x=\pi$$

αφού $x\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$



Αν $x\in(0,\pi):\eta\mu x>0\Leftrightarrow-\eta\mu x<0\Leftrightarrow f'(x)<0$

Αν $x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right):\eta\mu x<0\Leftrightarrow-\eta\mu x>0\Leftrightarrow f'(x)>0$

Η $f\downarrow$ στο $(0,\pi]$

Η $f\uparrow$ στο $\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$

Για x=π η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(\pi)=συνπ=-1$

Γ3. Έστω $M(x,f(x))$ σημείο της Cf με $x<0$. Για να έχουμε εφαπτομένη παράλληλη στον $x'x$ θα πρέπει $f'(x)=0\Leftrightarrow 3ax^2-6x-1=0$

$\Delta=36-4\cdot 3\alpha\cdot(-1)=36+12\alpha=12(\alpha+3)<0$ αφού $\alpha<-3$

Συνεπώς η εξίσωση $f'(x)=0$ είναι αδύνατη, άρα δεν υπάρχουν σημεία με αρνητική τετμημένη στα οποία η εφαπτόμενη να είναι παράλληλη στον $x'x$

Γ4. $f(x)\geq -1$ $x\in\left(-\infty,\frac{3\pi}{2}\right)$

Για $x\leq 0$ $f(x)=ax^3-3x^2-x+1$

$f'(x)=3ax^2-6x-1\Rightarrow$ $f'(x)<0$ για $x<0$ αφού

$\Delta=36-4\cdot 3\alpha(-1)=36+12\alpha=12(3+\alpha)<0$ διότι $\alpha<-3$ και $3\alpha<0$

X	$-\infty$	0	Π	$\frac{3\pi}{2}$
$3ax^2-6x-1$	-			
$-\eta\mu x$		-	+	
$f'(x)$	-	-	+	
$f(x)$	↘		$f(\pi)=-1$ ↗	

άρα $f'(x)<0$ στο $(-\infty,0)\cup(0,\pi)$ και αφού η f συνεχή στο 0 έχουμε ότι η $f\downarrow$ στο $(-\infty,\Pi)$ και η $f\uparrow$ στο $\left[\Pi,\frac{3\pi}{2}\right]$.

Για $x=\Pi$ η f παρουσιάζει ελάχιστο το $f(\Pi)=-1$

Άρα $f(x)\geq -1$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $A(x)=\ln x-\frac{1}{x}$ $με$ $x\in(0,+\infty)$

Έχουμε:

• Α συνεχής στο [1,e] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

• $A(1)=\ln 1-\frac{1}{1}=-1<0$

$A(e)=\ln e-\frac{1}{e}=1-\frac{1}{e}=\frac{e-1}{e}>0$

άρα $A(1)\cdot A(e)<0$

άρα σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o \in (1,e)$, τέτοιο ώστε $A(x_o)=0$

$A'(x)=\left(\ln x-\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0$ για x > 0

άρα η Α είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, άρα x_o μοναδική ρίζα.

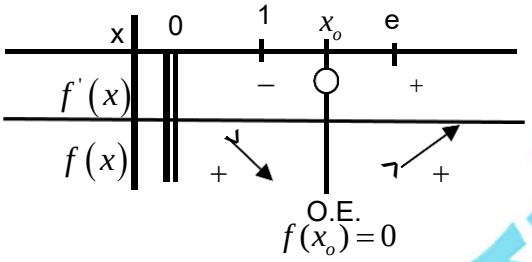
Δ2. Έχουμε $f(x)=(\ln x_o)\cdot(x+1)-\ln x-1 \quad με \quad x\in(0,+\infty)$

$f'(x)=\left((\ln x_o)(x+1)-\ln x-1\right)'=(\ln x_o)(x+1)'-(\ln x)'-(1)'=\ln x_o-\frac{1}{x}=\frac{1}{x_o}-\frac{1}{x}$

$f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{1}{x_o}-\frac{1}{x}>0\Leftrightarrow\frac{1}{x_o}>\frac{1}{x}\overset{x_o>0}{\underset{x>0}{\Leftrightarrow}}x_o\cdot x\frac{1}{x_o}>x_o\cdot x\frac{1}{x}\Leftrightarrow x>x_o$

$f'(x)<0\Leftrightarrow\frac{1}{x_o}<\frac{1}{x}\Leftrightarrow x<x_o$

$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{x_o}-\frac{1}{x}=0\Leftrightarrow\frac{1}{x_o}=\frac{1}{x}\Leftrightarrow x_o=x_o$



Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x_o το

$f(x_o)=(\ln x_o)(x_o+1)-\ln x_o-1=x_o\ln x_o+\ln x_o-\ln x_o-1=x_o\frac{1}{x_o}-1=1-1=0$

Δ3. Για να βρούμε τα κοινά σημεία των Cg και Ch λύνουμε το σύστημα

$$\begin{cases}y=g(x)\\y=h(x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x\cdot e^{-x}\\y=\left(\frac{x_o}{e}\right)^{x+1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x\cdot e^{-x}\quad(1)\\x\cdot e^{-x}=\left(\frac{x_o}{e}\right)^{x+1}\quad(2)\end{cases}$$

Έχουμε ότι $\left(\frac{x_o}{e}\right)^{x+1}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

άρα η $(2)\Leftrightarrow x\cdot e^{-x}>0\overset{e^{-x}>0}{\Leftrightarrow}x>0$

Η $(2)\Leftrightarrow\ln\left(xe^{-x}\right)=\ln\left(\frac{x_o}{e}\right)^{x+1}\Leftrightarrow\ln x+\ln e^{-x}=(x+1)\ln\frac{x_o}{e}\Leftrightarrow\ln x-x=(x+1)(\ln x_o-\ln e)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ln x-x=(x+1)\ln x_o-x-1\Leftrightarrow 0=(\ln x_o)(x+1)-\ln x-1\Leftrightarrow f(x)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=x_o$ γιατί μόνο $f(x_o)=0$

Για $x\in(0,x_o)\cup(x_o,+\infty)$ έχουμε $f(x)>0$

Αν $x=x_o$ τότε $y=g(x_o)=x_oe^{-x_o}$. Άρα οι Cg και Ch έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $M\left(x_o,x_oe^{-x_o}\right)$.

$$g'(x)=\left(x\cdot e^{-x}\right)'=e^{-x}-x\cdot e^{-x}\overset{x=x_o}{\Rightarrow}$$

$$g'(x_o)=e^{-x_o}-x_oe^{-x_o}=e^{-x_o}\left(1-x_o\right)$$

$$h'(x)=\left(\left(\frac{x_o}{e}\right)^{x+1}\right)'=\left(\frac{x_o}{e}\right)^{x+1}\cdot\ln\left(\frac{x_o}{e}\right)\cdot(x+1)'=\left(\frac{x_o}{e}\right)^{x+1}\cdot\ln\left(\frac{x_o}{e}\right)$$

Αρκεί να δείξουμε ότι:

$$g'(x_o)=h'(x_o)\Leftrightarrow e^{-x_o}\cdot(1-x_o)=\left(\frac{x_o}{e}\right)^{x_o+1}\ln\frac{x_o}{e}\Leftrightarrow e^{-x_o}-x_oe^{-x_o}=\frac{x_o{}^{x_o+1}}{e^{x_o}\cdot e}(\ln x_o-1)\Leftrightarrow$$

$$e^{x_o}\cdot e^{-x_o}-e^{x_o}\cdot x_oe^{-x_o}=e^{x_o}\frac{x_o{}^{x_o+1}}{e^{x_o}e}(\ln x_o-1)\Leftrightarrow 1-x_o=\frac{x_o{}^{x_o+1}}{e}(\ln x_o-1)\quad(3)$$

Έχουμε $f(x_o)=0\Leftrightarrow(\ln x_o)(x_o+1)-\ln x_o-1=0\Leftrightarrow\ln x_o{}^{x_o+1}=\ln x_o+1\Leftrightarrow e^{\ln x_o{}^{x_o+1}}=e^{\ln x_o+1}$

$x_o{}^{x_o+1}=e^{\ln x_o}e^1\Leftrightarrow x_o{}^{x_o+1}=x_o\cdot e$

Άρα η $(3)\Leftrightarrow 1-x_o=\frac{x_o\cdot e}{e}(\ln x_o-1)\Leftrightarrow 1-x_o=x_o\ln x_o-x_o\Leftrightarrow 1=x_o\ln x_o\Leftrightarrow\ln x_o=\frac{1}{x_o}$ που ισχύει άρα ισχύει και η ισοδύναμη αρχική.

Άρα $g'(x_o)=h'(x_o)$ και $g(x_o)=h(x_o)$
άρα δέχονται την ίδια εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο Μ

Δ4. Έχουμε: $(AB)=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}=\sqrt{(x-x)^2+\left(f(x)-\varphi(x)\right)^2}=\left|f(x)-\varphi(x)\right|=f(x)-\varphi(x)$
αφού $f(x)>\varphi(x)$ για κάθε $x>0$
Θέτουμε $B(x)=f(x)-f(x)$, $x>0$
Έχουμε $B(x)\geq B(x_o)$ για κάθε $x>0$
Αν η φ είναι παραγωγίσιμη στο x_o τότε και Β παραγωγίσιμη στο x_o
Έχουμε: x_o θέση ελαχίστου της Β στο $(0,+\infty)$
x_o εσωτερικό σημείου του $(0,+\infty)$
Β παραγωγίσιμη στο x_o, άρα από θεώρημα Fermat
$B'(x_o)=0\Leftrightarrow f'(x_o)-\varphi'(x_o)=0\Leftrightarrow\varphi'(x_o)=0$ άρα x_o κρίσιμο σημείο της φ
Αν η φ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_o, τότε και πάλι το x_o είναι κρίσιμο σημείο φ.

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Δ. ΔΟΥΝΙΑΣ, Ε. ΜΩΡΟΣ, Γ. ΑΛΛΑΓΙΑΝΝΗΣ